הקדמה למהדורה המתורגמת

בשנת 1905 פרסם אלברט איינשטיין סדרה של מאמרים בכתב העט Annalen der Physik. במאמר שנשא את הכותרת "על האלקטרודינמיקה של גופים נעים" הציג איינשטיין את תורת היחסות הפרטית. מסמך זה הוא תרגום לעיברית של המאמר.

<u>הערות תרגום:</u>

1. במונח "מהירות" הכוונה תמיד למהירות-מכוונת (velocity).

המאמר תורגם ונערך ע"י יונתן זלפה.

על האלקטרודינמיקה של גופים נעים

אלברט איינשטיין

30 ביוני, 1905

ידוע שהאלקטרומגנטיות של מקסוול - כפי שמקובל להבינה בזמננו- מובילה לאסימטריות כאשר היא מיושמת לגופים נעים. אסימטריות זו לא נראית כתול-דה של התופעה. ניקח לדוגמה את הפעילות האלקטרומגנטית ההדדית בין מגנט למוליך. התופעה שנצפית כאן תלויה אך ורק בתנועה היחסית של המוליך והמגנט, בעוד שנקודת המבט אליה הורגלנו מותחת אבחנה חדה בין שני מקרים, מקרה אחד בו המוליך בתנועה ומקרה אחר בו המגנט בתנועה. שהרי אם המגנט בתנועה והמוליך במנוחה, יופיע שדה חשמלי בעל אנרגיה מוגדרת בסביבת המגנט שיצור זרם במקום בו המוליך נמצא. אבל אם המגנט נמצא במנוחה והמוליך נמצא בתנועה לא יווצר שדה חשמלי בסביבתו של המגנט. לעומת זאת במוליך אנו מוצאים כח חשמלי שאין לו כשלעצמו אנרגיה תואמת, אבל נותן - בהנחה שמתקי-ים שוויון בתנועה היחסית בשתי המקרים הנידונים - כח חשמלי באותו כיוון ובאותה עוצמה כמו במקרה הקודם.

דוגמאות מהסוג שלעיל, יחד עם נסיונות לא מוצלחים לגילוי של איזושהי תנועה של הארץ ביחס ל"מדיום של האור (האתר)" מרמזים על כך שתופעות האלקטר-ודינמיקה והמכניקה אינן בעלות תכונות המתאימות לרעיון של מנוחה מוחלטת. ליתר דיוק הם מרמזים (כפי שכבר הודגם עד לסדר הראשון בערכים קטנים) שאותם חוקים של אלקטרודינמיקה ואופטיקה יהיו תקפים לכל מערכות היחוס שבהם משוואות המכניקה מתקיימות. אנו נעלה השערה זו (שתכונה מעתה והלאה

בשם "עיקרון היחסות") למעמד של הנחת יסוד (אקסיומה), ונציג הנחת יסוד נו-ספת, שלכאורה אינה מתיישבת עם הנחת היסוד הקודמת, והיא שבמרחב ריק האור מתפשט במהירות (velocity) קבועה c שאינה תלויה מצב התנועה של הגוף ממנה הוא יוצא. שתי הנחות היסוד הללו מספיקות בכדי להשיג תורה עקבית ופשוטה על האלקטרודינמיקה של גופים נעים המבוססת על תורת מקסוול עבור גופים במנוחה. הצורך ב"אתר מוליך אור" יהפוך למיותר שכן נקודת המבט שלנו לא תרשה "מנוחה מוחלטת במרחב" בעל תכונות מיוחדות ולא תרשה הצבת וקטור-מהירות לנקודה במרחב הריק שבה מתרחש התהליך האלקטרומגנטי.

התיאוריה שנפתח מבוססת - כמו כל האלקטרודינמיקה - על קינמטיקה של גוף קשיח, מאחר וההנחות של כל תורה שכזאת חייבות לעסוק בקשרים שבין גופים קשיחים (מערכות של צירים), שעונים ותהליכים אלקטרומגנטיים. שיקול לא מספק של התנאי הזה מונח בשורש הקשיים שבהם נתקלת האלקטרודינמיקה של גופים נעים בהווה.

תוכן עניינים

I חלק קינמטי 4

1 הגדרת הסימולטניות 4

2 על היחסיות של זמנים ואורכים 7

3 תורת הטרנספורמציות של מערכות צירים וזמנים ממערכת נייחת למערכת אחרת הנמצאת בתנועה טרנסלטורית קצובה ביחס למערכת הנייחת 9

4 משמעות פיזיקלית למשוואות שקיבלנו בנוגע לגופים קשיחים נעים ולשעונים נעים 14

5 משפט החיבור של המהירויות 16

II החלק האלקטרודינמי 19
6 טרנספורמציות של משוואות מקסוול-הרץ עבור חלל ריק. על טיבעם של הכוחות האלקטרומניעים המתרחשים בשדה מגנטי במהלך תנועה 19
7 התורה של עיקרון דופלר ושל הטיית האור 22
8 טרנספורמציה של אנרגיית קרן האור. התורה של לחץ הקרינה המופעל על מחזירי-אור משוכללים 25
9 טרנספורמציה של משוואות מקסוול-הרץ כאשר זרימות-קונווקציוניות נלקחות בחשבון 27
10 דינמיקה של אלקטרון המואץ באיטיות 29

חלק I

חלק קינמטי

1 הגדרת הסימולטניות

הבה ניקח מערכת צירים המקיימת את מערכת המשוואות של המכניקה הניוטונית. בכדי להפוך את הצגת הדברים למדוייקת יותר ובכדי לבדל את מערכת הצירים הזו באופן מילולי ממערכות אחרות שנציג בהמשך, אנו נכנה את מערכת הצירים הזו בשם "המערכת הנייחת".
אם נקודה חומרית נמצאת במצב של מנוחה יחסית למערכת הצירים הזו, אז ניתן להגדיר את מיקומה באמצעות הפעלת שיטות מדידה סטנדרטיות על גוף קשיח ובאמצעות הפעלת שיטות של גיאומטריה אוקלידית, נוכל לבטא את המיקום באמצעות מערכת צירים קרטזית.
אם אנו רוצים לתאר את התנועה של נקודה חומרית, אז אנו נותנים את ערכי הקואורדינטות שלה כפונקציה של הזמן. עתה עלינו לזכור בזהירות שהצגה מתמ-

טית מסוג זה היא חסרת משמעות פיזיקלית, כל עוד לא הבהרנו לגמרי מה אנו מבינים במונח "זמן". עלינו לקחת בחשבון שכל הפסיקות שלנו שבהם הזמן משחק תפקיד הם שיפוטים של מאורעות סימולטנים. אם, לדוגמה, אני אומר ש"הרכבת מגיעה לפה בשעה 7", אז אני מתכוון למשהו כזה "הצבעת המחוג הקטן שבשעון שלי על 7 והגעתה של הרכבת הם מאורעות סימולטניים"

ייתכן וניתן להתגבר על כל הקשיים הנוגעים להגדרת ה-"זמן" על ידי החלפתו ב"מיקום של המחוג הקטן בשעון שלי". למעשה הגדרה שכזאת מספקת עבור המקרה שבו הזמן מוגדר רק כמקום בו השעון נמצא; אבל ההגדרה לא מספקת כאשר עלינו לחבר בזמן סדרות של אירועים המתרחשים במקומות שונים, או - מה שמגיע לאותו דבר - קביעת הזמן של מאורעות המתרחשים במקומות הרחוקים מהשעון.

נוכל, כמובן, להגביל את עצמנו עם ערכי הזמן הנקבעים על ידי צופה הממוקם יחד עם השעון בראשית הצירים ולתאם את המיקומים המתאימים של המחוגים עם אותות האור המגיעים מכל אירוע שיתוזמן דרך מרחב ריק. אבל, כפי שידוע לנו מניסויים למערכת צירים זו יש חסרון המערכת אינה בלתי תלויה בנקודת המבט של הצופה עם השעון. אנו מגיעים לקביעה מעשית יותר לפי הלך החשיבה הבא:

אם בנקודה A שנמצאת במרחב יש שעון, אז צופה במרחב שנמצא בנקודה A יוכל לקבוע את ערכי הזמן של אירועים בסמיכות המיידית של A על ידי מציאת מיקומי המחוגים אשר סימולטנים עם האירועים הללו. אם יש בנקודה B שבמר-חב שעון נוסף שדומה בכל המובנים לזה שנמצא ב-A, אז צופה הנמצא ב-B יוכל לקבוע את ערכי הזמן של אירועים בסביבה המיידית של B. אבל ללא הנחות נוספות לא נוכל להשוות , ביחס לזמן, אירוע שקורה ב-A עם אירוע שקורה ב-B. עד עתה הגדרנו רק את "זמן A" ואת "זמן B". עלנו להגדיר "זמן" משותף עבור A ועבור B אבל "זמן" משותף שכזה לא ניתן כלל להגדרה, אלא אם בונים הגדרה שאומרת שהזמן שלוקח ל-אור לעבור מהנקודה A לנקודה B שווה לזמן שלוקח ל-אור לעבור מהנקודה B לנקודה A. נניח שקרן אור מתחילה בשעה t_A לפי "זמן

"A מהנקודה A לנקודה B ונניח שאותה קרן חוזרת בהשתקפות מהנקודה B לכיוון הנקודה A בשעה t_B לפי "זמן B" ומגיע לנקודה A בשעה t'_A.
לפי ההגדרה שלנו שני השעונים מסונכרנים אם

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$

אנו מניחים שהגדרת הסינכרון חופשית מסתירות ושהיא אפשרית לכל מספר של נקודות ושהיחסים שלהלן תקפים אוניברסלית:

1. אם השעון שבנקודה B מסונכרן עם השעון שבנקודה A, אז השעון שבנקודה A מסונכרן עם השעון שבנקודה B.

2. אם השעון שבנקודה A מסונכרן עם השעון שבנקודה B ועם השעון שבנקודה C, אז גם השעונים שבנקודות B ו- C מסונכרנים.

לפיכך, באמצעות מספר ניסויים פיזיקלים דמיוניים נתנו מענה למה הכוונה בשעונים מסונכרנים נייחים הנמצאים במקומות שונים, כמו כן מצאנו הגדרה עבור "סימולטניות" או "סינכרוניות" ועבור "זמן". ה"זמן" של אירוע הוא זה הניתן לו באופן סימולטני באמצעות שעון נייח הממוקם במקום האירוע, שעון זה מסונכרן, ואומנם הוא אכן מסונכרן עם כל הגדרה של זמן הניתנת על ידי שעון נייח מסויים.
בהתאם לניסוי אנו מניחים שהגודל

$$\frac{2AB}{t'_A - t_A} = c$$

הוא קבוע אוניברסלי ושווה בערכו למהירות האור בחלל ריק.
הגדרת הזמן במונחים של שעון נייח הינה הכרחית למערכת הנייחת, והזמן שהגדרנו עתה מתאים למערכת הנייחת אנו נקרא לזמן זה בשם "הזמן של המערכת הנייחת".

2 על היחסיות של זמנים ואורכים

הדיון שלהלן מבוססת על עיקרון היחסיות ועל העיקרון לפיו מהירות האור היא קבוע. נגדיר את שתי העקרונות הללו באופן הבא:

1. החוקים שלפיהם מערכות פיזיקליות משתנות אינם מושפעים בעצמם, בין אם מייחסים את שינוי המצב למערכת אחת או למערכת אחרת מתוך שתי מערכות צירים בעלות תנועה טרנסלטורית[1] קצובה.

2. כל קרן אור במערכת הצירים ה"נייחת" נעה במהירות קבועה c, בין אם מדובר בקרן אור שנפלטת מגוף במנוחה או מגוף בתנועה. לפיכך

$$\text{מהירות} = \frac{\text{מסלול אור}}{\text{קטע זמן}}$$

כאשר את קטע הזמן יש לקחת במובן של ההגדרה המופיעה בסעיף 1.

יהי נתון מוט קשיח נייח שאורכו לפי אמת-מידה נייחת הוא l. נדמיין שציר המוט נמצא על ציר ה-x של מערכת הצירים הנייחת ושהמוט נע במהירות וקטורית v בכיוון העולה של ציר ה-x בתנועה טרנסלטורית מקבילית וקצובה לאורך ציר ה-x. השאלה שנשאל את עצמנו היא מה הוא אורכו של המוט הנע? נדמיין שאורכו של המוט ניתן למדידה לפי הפעולות הבאות:

(א) הצופה נע יחד עם אמת-המידה והמוט, ומודד את אורך המוט באמצעות אמת-המידה בדיוק כפי שמודדים גוף שנמצא במנוחה.

(ב) באמצעות שעונים נייחים שנמצאים במערכת הנייחת ומסונכרנים בהתאם להגדרה שבסעיף 1. הצופה מברר באלו נקודות של המערכת הנייחת שתי הקצוות של המוט נמצאים בזמן מסויים. המרחק בין שתי הנקודות הללו, נמדד באמצעות אותה אמת-מידה ששימשה אותנו בסעיף א, כאשר, במקרה שלפננו אמת-המידה (הציר) נמצא במנוחה, המרחק שנמדד בדרך זו יכול אף הוא לציין את "האורך של המוט".

[1] תנועה של גוף קשיח (צפיד) שבה כל החלקיקים של הגוף הקשיח נעים באותו כיוון ובמקביל

בהתאם למוסכמות של עקרונות היחסות האורך שנמדד בפעולה (א) - שנקרא לו בשם "האורך של המוט במערכת הנעה" - יהיה שווה לאורך המוט הנייח, כלומר לאורך l.

האורך שנמדד בפעולה (ב) יקרא בשם "האורך של המוט (הנע) במערכת הנייחת". נוכל לקבוע את האורך בהתבסס על שתי העקרונות שלעיל, ואנו נמצא שהאורך הזה שונה מהערך הסקלרי l.

הקינמטיקה העכשווית מניחה באופן מרומז שהאורכים הנקבעים על ידי שתי הפעולות הללו שווים בדיוק לאותו ערך, או במילים אחרות, היא מניחה שהגופים הקשיחים הנעים בזמן t יכולים להיות מיוצגים מבחינה גיאומטרית על ידי אותו גוף שנמצא במנוחה ובמיקום קבוע.

נרחיק ונדמיין שבכל אחת מקצותיו של המוט בנקודות A ו-B ניצב שעון שמ-סונכרן עם השעון של המערכת הנייחת, כלומר התצוגה של השעונים בכל רגע תואמת ל"זמן של המערכת הנייחת" במקום שבו הם עשויים להימצא. לפיכך השעונים הללו "מסונכרנים עם המערכת הנייחת".

נרחיק ונדמיין שבכל שעון יש צופה נע, ושהצופים הללו מיישמים את כללי סינכרון השעונים שבסעיף 1 עבור כל אחד משתי השעונים. נאפשר לקרן אור לעזוב את נקודה A בזמן [2] t_A, נאפשר לקרן לחזור מהנקודה B לעבר הנקודה A בזמן t_B ולהגיע לנקודה A בזמן t'_A. בהתחשב בכך שמהירות האור קבועה, אנו מקבלים

$$t_B - t_A = \frac{\gamma_{AB}}{c-v} \qquad \text{וגם} \qquad t'_A - t_B = \frac{\gamma_{AB}}{c+v}$$

כאשר γ_{AB} מסמן את האורך של המוט הנע - כפי שהוא נמדד על ידי המערכת הנייחת. לפיכך, צופה שנע ביחד עם המוט הנע יבחין ששני השעונים לא מסונכנים, בעוד שצופה הנמצא במערכת הנייחת יאמר ששני השעונים מסונכרנים.

לפיכך, אנו רואים שלא ניתן לתת משמעות אבסולוטית למונח סימולטניות, אבל שתי האירועים, שנצפו מתוך מערכת הצירים סימולטנים, זאת למרות שלא ניתן לחזות את הסימולטניות שלהם מתוך מערכת שנעה באופן יחסי למערכת הזו.

[2] המונח "זמן" מציין פה את "הזמן של המערכת הנייחת" ואת "מיקום המחוגים שבשעון הנע כפי המובאים בהמשך הדיון

3 תורת הטרנספורמציות של מערכות צירים וזמנים ממערכת נייחת למערכת אחרת הנמצאת בתנועה טרנסלטורית קצובה ביחס למערכת הנייחת

הבה וניקח שתי מערכות צירים במרחב ה"נייח". במילים אחרות ניקח שתי מערכות צירים המורכבות משלושה צירים שאנכים אחד לשני ויוצאים מאותה נקודה. נניח שציר ה-X של שתי המערכות מתלכד וצירי ה-Y ו-Z שלהם מקבילים בהתאמה. לכל מערכת צירים נספק אמת-מידה ומספר שעונים, נניח גם שהאמות-מידה והשעונים שאנו מספקים זהים לגמרי.

עתה נאפשר לראשית של אחת ממערכות הצירים (k) לנוע במהירות קבועה v בכיוון העולה של ציר ה-X של במערכת הצירים הנייחת האחרת (K) בנוסף נאפשר למהירות וקטורית זו להיות מקושרת למערכות הצירים לאמות-המידה הרלבנטיות ולשעונים. לכל זמן במערכת הנייחת (K) נתאים מיקום קואורדינטי מוגדר (לפי המערכת K) למערכת הנעה, ומשיקולים סימטריים נוכל להניח שהמערכת k נעה באופן כזה שהצירים של המערכת הנעה מקבילים לצירים של המערכת הנייחת בזמן t (כאשר כמו תמיד t מסמנת את הזמן במערכת הנייחת). נדמיין עתה שמדידת המרחב מתבצעת מהמערכת הנייחת K באמצעות אמת-המידה הנייחת (אמת-המידה של המערכת הנייחת) וגם מהמערכת הנעה k באמצעות אמת-המידה הנעה עימה; לפיכך אנו מגיעים למערכות הצירים x, y, z ו-ξ, η, ζ בהתאמה. נרחיק הלאה ונאפשר לזמן t של המערכת הנייחת להיקבע לכל הנקודות שבהם יש שעונים באמצעות שימוש בשיטה של איתותי אור, כפי שתוארה בסעיף 1. באופן דומה, באמצעות שימוש בשיטה של איתותי אור בין נקודות שבהם ממוקמים שעונים, כפי שתוארה בסעיף 1, נוכל לאפשר לזמן τ של המערכת הנעה להיקבע באמצעות כל הנקודות של המערכת (הנעה) שבהם יש שעונים ואשר ביחס למערכת הנעה נמצאים במנוחה.

לכל מערכת של ערכים x, y, z, t, שמגדירים באופן מוחלט את המיקום והזמן של

אירוע במערכת הנייחת, קיימים מערכת של ערכים $\xi, \eta\, \zeta, \tau$ הקובעים באופן יחסי את אותו אירוע במערכת k, והמשימה שלנו היא לגלות את מערכות המשוואות עבור הגדלים הללו.

מתוקף יחסי ההומוגניות שאנו מייחסים לזמן ולמרחב ברור, מלכתחילה, שהמשוואות צריכות להיות לינאריות.

אם נציב $x' = x - vt$, אזי ברור שערכי-המערכת של נקודה שנמצאת במנוחה במערכת k חייבים להיות x', y, z, ללא תלות בזמן. תחילה נגדיר את τ כפונקציה של x', y, z ו-t. על מנת לעשות זאת עלינו להביע באמצעות משוואות ש-τ הוא לא יותר מסיכום נתונים של כל השעונים הנמצאים במנוחה במערכת k, שסונכרנו לפי הכללים שניתנו בסעיף 1.

נניח שקרן יוצאת מראשית הצירים של המערכת k בזמן τ_0 ונעה לאורך ציר ה-X, נניח שהקרן משתקפת בחזרה מהנקודה x' לראשית הצירים בזמן τ_o ומגיע שוב לראשית בזמן τ_2; אזי אנו חייבים לקבל את השוויון $\frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_2) = \tau_1$, או, ע"י הכנסת המשתנים הבלתי-תלויים של הפונקציה τ והפעלת עיקרון המהירות הקבועה של האור במערכת הנייחת

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t) + \tau\left(0,0,0,t + \frac{x'}{c-v} + \frac{x'}{c+v}\right)\right] = \tau\left(x', 0, 0, t + \frac{x'}{c-v}\right).$$

לפיכך, עבור x' קטן דיו מקבלים

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right)\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{1}{c-v}\frac{\partial \tau}{\partial t},$$

או

$$\frac{\partial \tau}{\partial x'} + \frac{v}{c^2 - v^2}\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

נעיר שבמקום הראשית של מערכת הצירים היינו יכולים לבחור כל נקודה אחרת שתהווה נקודת מוצא לקרן, לפיכך המשוואה שלעיל תקפה לכל הערכים של x', y, z.

שיקולים אנלוגים תקפים גם עבור הצירים Y ו-Z, כשזוכרים שהאור שנצפה מה-מערכת הנייחת, מתפשט כל הזמן לאורך הצירים הללו במהירות של $\sqrt{c^2 - v^2}$

מקבלים

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}=0 \qquad \text{וגם} \qquad \frac{\partial\tau}{\partial z}=0.$$

מאחר ש-τ היא פונקציה לינארית עולה מהשוואות הללו

$$\tau = a\left(t-\frac{v}{c^2-v^2}x'\right)$$

כאשר a היא הפונקציה $\phi(v)$ שלפי שעה איננה ידועה, וכאשר לשם קיצור אנו יוצאים מנקודת הנחה שבראשית של k, $\tau=0$, כאשר $t=0$.

בעזרת התוצאות הללו נוכל בקלות לקבוע את הערכים של ξ,η,ζ ע"י כך שנבטא במשוואות שהאור (כפי שמתבקש מעיקרון הקביעות של מהירות האור, בשילוב עם עיקרון היחסותיות) יתפשט גם הוא במהירות c כאשר הוא נמדד מהמערכת הנעה. עבור קרן אור שמתפשטת בכיוון העולה של ξ בזמן $\tau=0$ מקבלים

$$\xi = c\tau \qquad \text{וגם} \qquad \xi = ac\left(t-\frac{v}{c^2-v^2}x'\right)$$

אבל, הקרן נעה באופן יחסי לנקודת ההתחלה של k, כאשר היא נמדדת מהמערכת הנייחת, עם מהירות $c-v$, כך ש-

$$\frac{x'}{c-v}=t$$

אם נציב את הערך של t במשוואה הקודמת (המשוואה של ξ) נקבל

$$\xi = a\frac{c^2}{c^2-v^2}x'$$

באופן אנלוגי, בהתייחס לקרן הנעה לאורך שתי הצירים האחרים, אנו מוצאים ש-

$$\eta = c\tau = ac\left(t-\frac{v}{c^2-v^2}x'\right)$$

כאשר

$$\frac{y}{\sqrt{c^2-v^2}}=t, \qquad x'=0$$

ולפיכך

$$\eta = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \qquad \text{וגם} \qquad \xi = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}z.$$

נחליף את x בערך שלו, אנו מקבלים

$$\begin{aligned} \tau &= \phi(v)\beta(t - vx/c^2), \\ \xi &= \phi(v)\beta(x - vt), \\ \eta &= \phi(v)y, \\ \zeta &= \phi(v)z, \end{aligned} \tag{*}$$

כאשר

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

ואילו ϕ היא עדיין הפונקציה הלא ידועה של v. אם לא מניחים שום דבר על המיקום ההתחלתי של המערכת הנעה ועל נקודת האפס של τ, אז יש להוסיף קבוע אדיטיבי לצד הימני של כל אחת מהמשוואות הללו. עלינו להוכיח שההנחה שקרן אור מתפשטת במהירות קבועה c במערכת הנייחת (כפי שאנו אכן מניחים) מובילה לכך שקרן אור מתפשטת במהירות קבועה c גם במערכת הנעה. שהרי, עד כה, לא הוכחנו תאימות בין מהירות הקבוע של האור ובין עיקרון היחסותיות. בזמן $t = \tau = 0$, כאשר נקודת ראשית הצירים משותפת לשתי המערכות נאפשר לגל כדורי להתפשט מהראשית במהירות c במערכת K. אם (x, y, z) היא נקודה שרק הושגה על ידי הגל הזה, אזי

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

על ידי שימוש במשוואות הטרנספורמציה (משוואות *) ובחישובים פשוטים נוכל להעביר את המשוואה האחרונה לצורה

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = c^2\tau^2$$

לפיכך, כאשר צופים בגל הכדורי מהמערכת הנעה הוא לא יראה ככדור קטן יותר שנע במהירות פחותה ממהירות האור. מכאן שתי ההנחות הבסיסיות שלנו אכן

תואמות.
במשוואות הטרנספורמציה שפיתחנו מופיע פונקציה לא ידועה ϕ של משתנה v, עתה הגיע הזמן לתת הגדרה לפונקציה ϕ.
לשם כך נגדיר מערכת שלישית של צירים K', אשר נעה ביחס למערכת k בתנועה טרנסלטורית המקבילה לציר Ξ, באופן כזה שראשית הצירים של המערכת K' נע במהירות $-v$ לאורך הציר של Ξ. כאשר בזמן $t=0$ אנו מניחים שכל שלושת נקודות הראשית מתלכדות, כמו כן כאשר $t=x=y=z=0$ אנו מניחים שהזמן t' במערכת K' שווה לאפס. הצירים של המערכת הנמדדת K' יהיו x', y', z'. ובאמצעות שימוש כפול במשוואות הטרנספורמציה שלנו אנו מקבלים

$$\begin{aligned} t' &= \phi(-v)\beta(-v)(\tau + v\xi/c^2) &&= \phi(v)\phi(-v)t, \\ x' &= \phi(-v)\beta(-v)(\xi + v\tau) &&= \phi(v)\phi(-v)x, \\ y' &= \phi(-v)\eta &&= \phi(v)\phi(-v)y, \\ z' &= \phi(-v)\zeta &&= \phi(v)\phi(-v)z, \end{aligned} \tag{**}$$

מאחר והרלציות שמקשרות בין x', y', z' ובין x, y, z אינן כוללות את הזמן t, המערכות K ו-K' נמצאות במנוחה ביחס לכל אחת מהן, וברור שטרנספורמציית הזהות היא המעבירה את המערכת K' למערכת K'. לפיכך,

$$\phi(v)\phi(-v) = 1. \tag{1}$$

נחקור עתה את המשמעות של הפונקציה $\phi(v)$. נשים עתה לב לאותו חלק מציר ה-Y שבמערכת k שנמצא בין $\xi=0, \eta=0, \zeta=0$ ובין $\xi=0, \eta=0, \zeta=0$. החלק הזה הוא מוט שנע אנכית לציר שלו עם מהירות v ביחס למערכת K. הסוף שלו תופס ב-K את הקואורדינטות

$$x_1 = vt, \qquad y_1 = \frac{l}{\phi(v)}, \qquad z_1 = 0$$

ואת

$$x_2 = vt, \qquad y_2 = 0, \qquad z_2 = 0$$

לפיכך, האורך של המוט שנמדד במערכת K הוא $l/\phi(v)$ ולכן מכך אנו מקבל-ים גם את המשמעות של הפונקציה $\phi(v)$. משיקולים של סימטריה ניתן לראות שהאורך של מוט נתון הנע אנכית לציר שלו ונמדד במערכת הנייחת חייב להיות תלוי במהירות בלבד ולא בתחושה או בכיוון של התנועה. לפיכך, האורך של המוט הנע שנמדד במערכת הנייחת לא משתנה אם מחליפים בין v ו-$-v$. מכאן עולה ש-$l/\phi(v) = l/\phi(-v)$, או

$$\phi(v) = \phi(-v).$$

לכן מכך ומשוויון 1 עולה כי $\phi(v) = 1$, ולכן משוואות הטרנספורמציה שמצאנו קודם לכן (משוואות *) יהיו

$$\begin{aligned} \tau &= \beta\left(t - vx/c^2\right), \\ \xi &= \beta(x - vt), \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z, \end{aligned}$$

כאשר

$$\beta = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

4 משמעות פיזיקלית למשוואות שקיבלנו בנוגע לגופים קשיחים נעים ולשעונים נעים

נביט בגוף כדורי קשיח בעל רדיוס R שנמצא במנוחה ביחס למערכת הנעה k ושמרכזו נמצא על בראשית הצירים של מערכת הצירים של k. משוואת המשטח של הכדור הזה שנע במהירות v ביחס למערכת הנייחת K היא

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$$

כאשר מבטאים את המשוואה הזו במונחים של x, y, z ובזמן $t=0$ מקבלים

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^2}+y^2+z^2=R^2$$

הצורה של גוף קשיח שנמדד ממצב של מנוחה תהיה כדורית, לפיכך כאשר הגוף נמצא בתנועה ונצפה מהמערכת הנייחת הוא יקבל צורה של אליפסואיד מסתובב עם הצירים

$$R\sqrt{1-v^2/c^2}, \qquad R, \qquad R$$

לפיכך בעוד שמימדי ה-X וה-Y של הכדור (ואגב כך של כל גוף קשיח אחר תהא צורתו אשר תהא) נראים כגדלים שאינם משתנים עם התנועה, נראה שמימד ה-X מתכווץ ביחס של $1 : \sqrt{1-v^2/c^2}$, במילים אחרות ככל שהערך של v גדול יותר כך גדלה מידת הכיווץ. עבור $v=c$ כל העצמים הנעים, שנצפים מהמערכת הנייחת, מתכווצים לכדי צורה של מישור. עבור מהירויות הגדולות ממהירות האור הדיון שלנו הופך לחסר משמעות; אעפ"כ, בהמשך נמצא שמהירות האור משחקת את התפקיד הפיזיקלי של מהירות אינסופית.

ברור שאותם תוצאות תקיפות גם עבור גופים הנמצאים במנוחה במערכת "הני-יחת" ושנצפים ממערכת הנעה בתנועה קצובה.

נוסף על כך, נדמיין שאחד מהשעונים (שמתאים לרישום הזמן t כאשר הוא נמצא במנוחה ביחס למערכת הנייחת ולרישום הזמן τ כאשר הוא נמצא במנוחה במ-ערכת הנעה) נמצא על ראשית הצירים של מערכת הצירים k ולפיכך מכוון לרישום הזמן τ. מה יהיה הקצב של השעון כאשר הוא נצפה מהמערכת הנייחת?

הקשר בין הגדלים x, t ו-τ, אשר קובעים את מיקומו של השעון, נתון על ידי השוויונות $x=vt$ ו-

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(t-vx/c^2\right).$$

לפיכך,

$$\tau=t\sqrt{1-v^2/c^2}=t-\left(1-\sqrt{1-v^2/c^2}\right)t$$

ומכאן נובע שהזמן שנרשם על ידי השעון (שנצפה מהמערכת הנייחת) איטי יותר ב- $1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}$ שניות עבור כל שנייה, או - על ידי הזנחת גדלים מסדר רביעי והלאה - על ידי $\frac{1}{2}v^2/c^2$.

מהאמור נובעות התוצאות המוזרות הבאות. אם בנקודות A ו-B שבמערכת K מוצבים שעונים נייחים מסונכרנים (כאשר הם נצפים במערכת הנייחת) ואם השעון שמוצב בנקודה A נע לנקודה B במהירות v לאורך הקו AB, אז בהגיע השעון לנקודה B שני השעונים כבר לא יהיו מסונכרנים. השעון שנע מהנקודה A לנקודה B יפגר אחרי השעון שנשאר בנקודה B ב- $\frac{1}{2}tv^2/c^2$ (עד לגדלים מהסדר הרביעי ומעלה), כאשר t הוא הזמן שלקח לשעון להגיע מהנקודה A לנקודה B.

ניתן לראות שהתוצאה שלעיל תקפה גם עבור שעון שנע במסלול פוליגונלי וגם כאשר הנקודות A ו-B מתלכדות.

אם אנו מניחים שהתוצאה שהוכחה עבור מסלול פוליגונלי תקפה גם עבור קו רציף כלשהו, אנו מגיעים לתוצאה הבאה: אם אחד משני שעונים מסונכרנים הנ-מצאים בנקודה A נע לאורך עקום סגור במהירות קבועה עד שהוא חוזר לנקודה A, כאשר המסע כולו נמשך לאורך זמן של t שניות, אז לפי השעון שנותר במנוחה זמן המסע של השעון-הנוסע בהגיעו לנקודה A יהיה איטי ב-$\frac{1}{2}tv^2/c^2$ שניות. לפיכך אנו מסיקים ששעון-מאוזן (שעון שעובד בכוחות עצמו בלבד) [3] בקו המשווה ינוע לאט יותר, איטיות שתתבטא בזמן מאוד קטן, משעון זהה המונח באותם תנאים בקו המשווה.

5 משפט החיבור של המהירויות

במערכת k שנעה במהירות v לאורך ציר ה-X של המערכת K, נניח לנקודה מסוי-ימת לנוע בהתאם למשוואות

$$\xi = w_\xi \tau, \qquad \eta = w_\eta, \qquad \zeta = 0$$

[3] לא שעון-מטוטלת שמבחינה פיזיקלית נחשב לחלק מהמערכת אליה שייך כדור הארץ. מקרה זה הוא יוצא דופן.

כאשר w_ξ ו-w_η מסמנים קבועים.

נדרוש שהתנועת של הנקודה תהיה יחסותית למערכת K. ניעזר במשוואות הטר-נספורמציה שפיתחנו בסעיף 3 (משוואות *) בכדי לבטא את הגדלים x, y, z, t שמייצגים את תנועת הנקודה, אנו מקבלים

$$\begin{aligned} x &= \frac{w_\xi + v}{1 + v w_\xi / c^2} t. \\ y &= \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v w_\xi / c^2} w_\eta t, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

לפיכך, לפי התורה שלנו, חוק המקבילית של המהירויות הוקטוריות תקף רק עד כדי קירוב ראשוני. נציב

$$\begin{aligned} V^2 &= \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2, \\ w^2 &= w_\xi^2 + w_\eta^2, \\ a &= \tan^{-1} w_\eta / w_\xi. \end{aligned}$$

יש לראות את a כזוית שבין המהירויות הוקטוריות v ו-w. לאחר חישובים פשוטים אנו מקבלים

$$V = \frac{\sqrt{(v^2 + w^2 + 2vw\cos a) - (vw \sin a / c)^2}}{1 + vw \cos a / c^2}$$

שווה להעיר ש-v ו-w נכנסים לתוך הביטוי של תוצאת המהירות באופן סימטרי. אם גם w נמצא בכיוון של ציר ה-X, אנו מקבלים

$$V = \frac{v + w}{1 + vw/c^2}$$

מהמשוואה האחרונה נובע שחיבור שתי מהירויות שקטנות מ-c, ייתן תמיד מהיר-ות שהיא קטנה מ-c. שכן אם אנו מציבים $v = c - \kappa$ ו-$w = c - \lambda$ כאשר κ ו-λ חיוביים וקטנים מ-c, אז

$$V = c \frac{2c - \kappa - \lambda}{2c - \kappa - \lambda + \kappa\lambda / c} < c$$

בנוסף, נובע, שמהירות האור c לא יכולה להשתנות באמצעות כך שנוסיף לה מהירות שקטנה ממהירות האור. עבור מקרה זה אנו מקבלים

$$V = \frac{c+w}{1+w/c} = c.$$

על ידי הרכבת שתי טרנספורמציות בהתאם למופיע בסעיף 3 אנו יכולים לקבל נוסחה עבור V, במקרה בו v ו-w נמצאים באותו כיוון. אם למערכות K ו-k שתוארו בסעיף 3 נמשיך ונוסיף את מערכת הצירים k' הנעה במקביל ל-k, כאשר נקודת ההתחלה נעה על ציר ה-Ξ עם מהירות התחלתית w, אנו מקבלים משוואות המתארות את הקשר בין הגדלים x, y, z, t ובין הגדלים המתאימים להם במערכת k' אשר נבדלים מהמשוואות שמצאנו בסעיף 3 רק בכך שבמקום v יש לקחת את הגודל

$$\frac{v+w}{1+vw/c^2};$$

אשר מאפשר לנו לראות את הטרנספורמציות המקבילות - שהכרחיות - ליצירת חבורה.

הסקנו עתה את החוקים הדרושים של תורת הקינמטיקה התואמת לעקרונות שלנו, ואנו ממשיכים להראות את היישומים שלהם עבור האלקטרודינמיקה.

חלק II

החלק האלקטרודינמי

6 טרנספורמציות של משוואות מקסוול-הרץ עבור חלל ריק. על טיבעם של הכוחות האלקטרומניעים המתר-חשים בשדה מגנטי במהלך תנועה

נניח שמשוואות מקסוול-הרץ למרחב הריק תקפות גם למערכת K, כך שאנו מקבלים

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\,, & \frac{1}{c}\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\,,\\
\frac{1}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\,, & \frac{1}{c}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\,,\\
\frac{1}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\,, & \frac{1}{c}\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\,,
\end{aligned}$$

כאשר (X, Y, Z) מסמן וקטור של הכח החשמלי ואילו (L, M, N) מסמן כח מגנטי. אם נחיל את המשוואות הללו על הטרנספורמציות שפיתחנו בסעיף 3 (על ידי העברת התהליכים האלקטרומגנטים למערכות הצירים שהכרנו שם) וננוע במהיר-

ות v, אז נקבל את המשוואות

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\,\frac{\partial X}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \eta}\Big[\beta\Big(N-\frac{v}{c}Y\Big)\Big] - \frac{\partial}{\partial \zeta}\Big[\beta\left(M-\tfrac{v}{c}Z\right)\Big],\\
\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial \tau}\Big[\beta(Y-\frac{v}{c}N)\Big] &= \frac{\partial L}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \zeta}\Big[\beta\left(N-\tfrac{v}{c}Y\right)\Big],\\
\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial \tau}\Big[\beta(Z+\frac{v}{c}M)\Big] &= \frac{\partial}{\partial \xi}\Big[\beta\left(M-\tfrac{v}{c}Z\right)\Big] - \frac{\partial L}{\partial \eta},\\
\frac{1}{c}\,\frac{\partial L}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \zeta}\Big[\beta\Big(Y-\frac{v}{c}N\Big)\Big] - \frac{\partial}{\partial \eta}\Big[\beta\Big(Z+\frac{v}{c}M\Big)\Big],\\
\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial \tau}\Big[\beta(M+\frac{v}{c}Z)\Big] &= \frac{\partial}{\partial \xi}\Big[\beta\left(Z+\tfrac{v}{c}M\right)\Big] - \frac{\partial X}{\partial \zeta},\\
\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial \tau}\Big[\beta(N-\frac{v}{c}Y)\Big] &= \frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi}\Big[\beta\left(Y-\tfrac{v}{c}N\right)\Big],
\end{aligned}
$$

כאשר

$$\beta = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$$

לפי עיקרון היחסות אם משוואות מקסוול-הרץ מתקיימות עבור המערכת K במרחב הריק, אז הם מתקיימות גם עבור המערכת k; כלומר הוקטורים של הכוח החשמלי והכוח המגנטי - (X', Y', Z') ו-(L', M', N') - של המערכת הנעה k, שמוגדרים באמצעות אפקט פונדרומוטיבי (גורם שקילות) על המסות החשמליות והמגנטיות בהתאמה, מספקים את המשוואות הבאות:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial X'}{\partial \tau} &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}\,, & \frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}\,,\\
\frac{1}{c}\frac{\partial Y'}{\partial \tau} &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}\,, & \frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}\,,\\
\frac{1}{c}\frac{\partial Z'}{\partial \tau} &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}\,, & \frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi}\,,
\end{aligned}
$$

מובן מאליו ששתי מערכות המשוואות שמצאנו עבור המערכת k חייבות לבטא את אותו ההדבר, מאחר ושתי מערוכות המשוואות שקולות למשוואות מקסוול-הרץ

עבור המערכת k ומאחר שהמשוואות של שתי המערכות זהות (להוציא כמובן את השוני שבסימון של הוקטורים), נובע שהפונציות שמופיעות במשוואות, במקומות המתאימים, חייבות להיות זהות, להוציא את הגורם $\psi(v)$, שהוא גורם משותף עבור כל הפונקציות של מערכת אחת של משוואות, ואינו תלוי ב- ξ, η, ζ וב-τ אלא רק ב-v. לפיכך אנו מקבלים את הרלציות

$$\begin{aligned} X' &= \psi(v)X, & L' &= \psi(v)L, \\ Y' &= \psi(v)\beta\left(Y - \tfrac{v}{c}N\right), & M' &= \psi(v)\beta\left(M + \tfrac{v}{c}Z\right), \\ Z' &= \psi(v)\beta\left(Z + \tfrac{v}{c}Y\right) \end{aligned}$$

אם ניצור עתה את ההדדיות של מערכות המשוואות הללו, ראשית באמצעות מציאת פיתרון למשוואות שזה עתה קיבלנו, ושנית באמצעות החלת המשוואות לטרנספורמציה ההפוכה (מ-k ל-K), שמאופיינת על ידי המהירות v, אז בהתחשב בכך ששתי מערכות המשוואות שזה עתה קיבלנו חייבות להיות זהות אנו מקבלים ש- $\psi(v)\psi(-v) = 1$. יתר על כן, מתוך שיקולים של סימטריה אנו מקבלים

$$\psi(v) = 1$$

והמשוואות שלנו מקבלות את הצורה

$$\begin{aligned} X' &= X, & L' &= L \\ Y' &= \beta\left(Y - \tfrac{v}{c}N\right), & M' &= \beta\left(M + \tfrac{v}{c}Z\right) \\ Z' &= \beta\left(Z + \tfrac{v}{c}M\right), & N' &= \beta\left(N - \tfrac{v}{c}Y\right) \end{aligned}$$

נעיר מספר הערות לגבי הפירוש של המשוואות הללו:

נניח לנקודה להיות טעונה בחשמל בגודל "אחד", כאשר היא נמדדת מהמערכת הנייחת K, במילים אחרות, כאשר הנקודה נמצאת במנוחה במערכת הנייחת K נאפשר לה להפעיל כח שגודלו 1 דין על כמות שווה של חשמל הנמצאת במרחק של סנטימטר אחד. לפי עיקרון היחסות, כאשר מודדים את המטען החשמלי במערכת הנעה, יהיה גודלו גם הוא "אחד". אם הגודל החשמלי הזה נמצא במנוחה

ביחס למערכת הנייחת, אז לפי הגדרת הוקטור (X, Y, Z) הוא שווה לכוח הפועל עליו. אם הגודל החשמלי נמצא במנוחה ביחס ביחס למערכת הנעה (לפחות ברגע הרלבנטי), אז הכוח הפועל עליו, כפי שהוא נמדד במערכת הנעה, שווה לוקטור (X', Y', Z'). לפיכך, נוכך לנסח את שלושת המשוואות שלעיל במילים באופן הבא

1. אם נקודה טעונה במטען חשמלי בגודל יחידה נמצאת בתנועה בתוך שדה אלקטרומגנטי הפועל עליה (בנוסף לכוח החשמלי), אזי כאשר מזניחית את המכפלות של הגורמים ממעלה שניה והלאה של הביטוי v/c מקבלים שה-"כוח האלקטרומוטיבי" שווה למכפלה-הוקטורית של מהירות המיטען וה-כוח המגנטי לחלק למהירות האור. (דרך הצגה ישנה)

2. אם נקודה טעונה במטען חשמלי בגודל יחידה נמצאת בתנועה בתוך שדה אלקטרומגנטי, אז הכוח הפועל על הנקודה שווה לכוח החשמלי שמיוצג מק-ומית בסביבת המיטען, ושמובטח לנו באמצעות טרנספורמציה של השדה למערכת הצירים הנייחת ביחס למטען החשמלי. (דרך הצגה חדשה)

באופן אנלוגי התוצאות תקפות גם עבור ה-"כוח המגנטומוטיבי". אנו רואים שלכוח האלקטרומוטיבי יש רק תפקיד עזר בפיתוח התורה, שמצידו חב את הצגתו לכך שכוחות חשמליים ואלקטרומגנטים אינם מתקיימים ללא תלות במ-צב התנועה של מערכת הצירים. בנוסף לכך, ברור שהאסימטריות המוזכרת במבוא שנוצרה מתוך בחינת הזרמים שנוצרו מהתנועה היחסית של המגנט וה-מוליך, נעלמת כעת. יתרה מזאת, אין עוד טעם בשאלות לגבי "מושבם" של הכוחות האלקטרודינמיים והאלקטרומוטיביים.

7 התורה של עיקרון דופלר ושל הטיית האור

במערכת K, במרחק רב מראשית הצירים, נניח שיש מקור של גלים אלקטר-ומגנטים, אשר כחלק ממרחב שמכיל את מערכת הצירים הוא יכול להיות מיוצג,

עד רמת דיוק מספקת, על ידי המשוואות

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin\Phi, & L &= L - 0 \sin\Phi \\ Y &= Y_0 \sin\Phi, & M &= M_0 \sin\Phi \\ Z &= Z_0 \sin\Phi, & N &= N_0 \sin\Phi \end{aligned}$$

כאשר

$$\Phi = \omega\Big(t - \frac{1}{t}\,(lx + my + nz)\Big)$$

כאן (X_0, Y_0, Z_0) ו-(L_0, M_0, N_0) הם וקטורים שמגדירים את המשרעת (האמפליטודה) של הגל האחיד (wave-train) ואילו l, m, n מגדירים את הכיוון הקוסינוסיאידי של הנורמל-הגלי. אנו מעוניינים לגלות את החוקיות של הגלים הללות כאשר הם נבחנים על ידי צופה הנמצא במנוחה במערכת הנעה k.

מהפעלת משוואות הטרנספורמציה שמצאנו בסעיף 6 עבור הכוחות המגנטים והחשמליים, והפעלת המשוואות שמצאנו בסעיף 3 עבור מערכות הצירים והזמן, אנו מקבלים ישירות

$$\begin{aligned} X' &= X_0 \sin\Phi', & L' &= L - 0 \sin\Phi', \\ Y' &= \beta(Y_0 - vN_0/c) \sin\Phi', & M' &= \beta(M_0 + vZ_0/c) \sin\Phi', \\ Z' &= \beta(Z_0 + vM_0/c) \sin\Phi', & N' &= \beta(N_0 - vY_0/c) \sin\Phi', \end{aligned}$$

$$\Phi' = \omega'\Big(\tau - \tfrac{1}{c}\,(l'\xi + m'\eta + n'\zeta)\Big)$$

כאשר

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega\beta(1 - lv/c), \\ l' &= \tfrac{l - v/c}{1 - lv/c}, \\ m' &= \tfrac{m}{\beta(1 - lv/c}, \\ n' &= \tfrac{n}{\beta(1 - lv/c)}. \end{aligned}$$

מהמשוואה עבור ω' נובע

שאם צופה נע במהירות v ביחס למקור אור בתדר ν ובמרחק אינסופי כך שהקו המחבר "צופה-מקור" יוצר זוית ϕ יחד עם המהירות של הצופה ביחס למערכת

הצירים שנמצאת במנוחה ביחס למקור האור, אז תדר האור ν שניקלט ע"י הצופה ניתן באמצעות המשוואה

$$\nu' = \nu \frac{1 - \cos\phi \cdot v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

זהו עיקרון דופלר עבור מהירות כלשהי. כאשר $\phi = 0$, מקבלים את המשוואה

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

אנו רואים שבניגוד לצפיה המורגלת, כאשר מציבים $v = -c$ במשוואה שלעיל מקבלים $\nu' = \infty$.

אם נכנה את הזוית שנוצרת בין נורמל-הגל (הכיוון של הקרן) במערכת הנעה ובין המחבר "מקור-צופה" בשם ϕ', אזי המשוואה עבור ϕ' מקבלת את הצורה

$$\cos\phi' - \frac{\cos\phi = v/c}{1 - \cos\phi \cdot v/c}.$$

משוואה זו מבטאת את חוק הסטייה במובנו הכללי ביותר. אם $\phi = \frac{1}{2}\pi$, המשוואה מקבלת את הצורה הפשוטה

$$\cos\phi' = -v/c$$

עלינו עדיין למצוא את המשרעת של הגלים, כפי שהיא מופיע במערכת הנעה. אם נקרא למשרעת של הכוח החשמלי או המגנטי A ו- A' בהתאמה, בהתאם לכפי שזה נמדד מהמערכת הנחה או המערכת הנעה, אנו מקבלים

$$A' = A^2 \frac{(1 - \cos\phi \cdot v/c)^2}{1 - v^2/c^2}$$

עבור $\phi = 0$ נוכל לפשט את המשוואה האחרונה ולקבל

$$A'^2 = A^2 \frac{1 - v/c}{1 + v/c}.$$

מהתוצאה האחרונה נובע שעבור הצופה המהירות של האור שמגיע מהמקור שווה ל-c, מקור האור הזה מתגלה כעוצמה אינסופית.

8 טרנספורמציה של אנרגיית קרן האור. התורה של לחץ הקרינה המופעל על מחזירי-אור משוכללים

מאחר ואנרגית האור שווה ל-$A^2/8\pi$ ליחידת נפח, הרי שלפי עיקרון היחסות, אנרגית האור במערכת הנעה תהיה שווה ל-$A'^2/8\pi$. לפיכך, בהינתן מתחם אור מסויים יחס האנרגיה בין "המידה שבתנועה" ל-"מידה שבמנוחה" יהיה שווה ל-A'^2/A^2 אם הנפח של מתחם האור זהה (לא משנה אם הוא נמדד ב-K או ב- k). אבל זה לא המקרה. אם l, m, n הם הכיוונים הקוסינוסיאידים של הנורמלים של הגל במערכת הנייחת, אז לא תעבור אנרגיה דרך רכיבי המשטח הכדורי שנע יחד עם המהירות של האור:-

$$(x - lct)^2 + (y - mct)^2 + (z - nct)^2 = R^2$$

לפיכך, נוכל לומר שהמשטח הזה סוגר את אותו מתחם אור לתמיד. אנו שואלים לגבי הכמות של האנרגיה הכלואה על ידי המשטח הזה, כפי שהיא נצפית במערכת k, כלומר, לגבי אנרגית תחום האור ביחס למערכת k.

המשטח הכדורי - שניצפה מהמערכת הנעה - הוא משטח אליפסואידי, משוואתו בזמן $\tau = 0$ תהיה

$$(\beta\xi - l\beta\xi v/c)^2 + (\eta - m\beta\xi v/c)^2 + (\zeta - n\beta\xi v/c)^2 = R^2.$$

אם S הוא נפח הכדור ו-S' הוא הנפח של האליפסואיד, אז באמצעות חישוב פשוט מקבלים

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \cos\phi \cdot v/c}.$$

לפיכך, אם נקרא לאנרגית האור הכלואה במשטח והנמדדת במערכת-הנייחת ובמ-ערכת הנעה בשמות E ו-E' בהתאמה, אז נקבל

$$\frac{E'}{E} = \frac{A'^2 S'}{A^2 S} = \frac{1 - \cos\phi \cdot v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

וכאשר $\phi = 0$ הנוסחה מקבלת את הצורה הפשוטה הבאה:

$$\frac{E'}{E} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

אין זה רגיל שהאנרגיה והתדר של תחום האור משתנים יחד עם מצב התנועה של הצופה בהתאם לאותו חוק.

עתה נניח שציר המישור $\xi = 0$ מהווה משטח רפלקטיבי משוכלל, כך שגל המישור שנידון בסעיף 7 חוזר. אנו מחפשים את לחץ האור המופעל על דפנות המשטח הרפלקטיבי, ואת הכיוון, התדר ועוצמת האור המוחזר לאחר ההשתקפות.

נניח ל-אור מקרי להיות מוגדר על ידי הגדלים $A, \cos\phi, \nu$ (ביחס למערכת K).
כאשר האור נצפה מהמערכת k הגדלים המתאימים הם

$$\begin{aligned}
A' &= A\frac{1 - \cos\phi \cdot v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\
\cos\phi' &= \frac{\cos\phi - v/c}{1 - \cos\phi \cdot v/c}, \\
\nu' &= \nu\frac{1 - \cos\phi \cdot v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},
\end{aligned}$$

עבור ה-אור החוזר, כאשר התהליך מיוחס למערכת k, אנו מקבלים

$$\begin{aligned}
A'' &= A' \\
\cos\phi'' &= -\cos\phi' \\
\nu'' &= \nu'
\end{aligned}$$

בסופו של דבר, על ידי טרנספורמציה המחזירה אותנו למערכת הנייחת K, אנו מקבלים עבור ה-אור החוזר

$$\begin{aligned}
A''' &= A''\frac{1 + \cos\phi'' \cdot v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} &&= A\frac{1 - 2\cos\phi \cdot v/c + v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}, \\
\cos\phi''' &= \frac{\cos\phi'' + v/c}{1 + \cos\phi'' \cdot v/c} &&= -\frac{(1 + v^2/c^2)\cos\phi - 2v/c}{1 - 2\cos\phi \cdot v/c + v^2/c^2}, \\
v''' &= v''\frac{1 + \cos\phi'' \cdot v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} &&= \nu\frac{1 - 2\cos\phi \cdot v/c + v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}.
\end{aligned}$$

האנרגיה (שנמדדת במערכת הנייחת) שמתרחשת על פני שטח יחידה של המראה בזמן יחידה שווה בבירור ל- $A^2(c\,\cos\phi - v)/8\pi$. האנרגיה שעוזבת משטח יחידה של המראה בזמן יחידה שווה ל- $A'''^2(-c\cos\phi''' + v)/8\pi$. לפי עיקרון האנרגיה, ההפרש בין שתי הביטויים האחרונים שווה לעבודה שמבצע לחץ-אור ביחידת זמן. אם ניקח אתת העבודה הזו כשווה למכפלה Pv, כאשר P הוא לחץ האור, אנו מקבלים

$$P = 2 \cdot \frac{A^2}{8\pi} \frac{(\cos\phi - v/c)^2}{1 - v^2/c^2}.$$

מניסויים מוסכמים ולפי תורות אחרות, אנו מקבלים את ההערכה הראשונה

$$P = 2 \cdot \frac{A^2}{8\pi} \cos^2\phi.$$

כל הבעיות באופטיקה של גופים נעים יכולים להיפתר באמצעות השיטה שמיושמת כאן. מה שהכרחי הוא להעביר את הכוחות החשמליים והמגנטים של האור, המושפעים מתנועת גופים, למערכת צירים הנמצאת במנוחה יחסית לגוף. בדרך זו כל הבעיות באופטיקה של גופים נעים יצטמצמו לסידרה של בעיות באופטיקה של מערכת נייחת.

9 טרנספורמציה של משוואות מקסוול-הרץ כאשר זרימות-קונווקציוניות נלקחות בחשבון

נצא מתוך המשוואות

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\left(\tfrac{\partial X}{\partial t} + u_x\rho\right) &= \tfrac{\partial N}{\partial y} - \tfrac{\partial M}{\partial z}, & \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial L}{\partial t} &= \tfrac{\partial Y}{\partial z} - \tfrac{\partial Z}{\partial y},\\
\frac{1}{c}\left(\tfrac{\partial Y}{\partial t} + u_y\rho\right) &= \tfrac{\partial L}{\partial z} - \tfrac{\partial N}{\partial x}, & \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial M}{\partial t} &= \tfrac{\partial Z}{\partial x} - \tfrac{\partial X}{\partial z},\\
\frac{1}{c}\left(\tfrac{\partial Z}{\partial t} + u_z\rho\right) &= \tfrac{\partial M}{\partial x} - \tfrac{\partial L}{\partial y}, & \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial N}{\partial t} &= \tfrac{\partial X}{\partial y} - \tfrac{\partial Y}{\partial x},
\end{aligned}$$

כאשר

$$\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

מסמן את המכפלה של 4π כפול צפיפות החשמל, ואילו (u_x, u_y, u_z) מסמן את וקטור המהירות של המטען. אם נדמיין שהמטען החשמלי קשור באופן בלתי משתנה לגופים קשיחים קטנים (יונים, אלקטרונים), אז המשוואות הללו הם הבסיס האלקטרומגנטי של האלקטרודינמיקה של לורנס והאופטיקה של גוחפים נעים.

נניח שהמשוואות הללו תקפות ונעביר אותם, בעזרת משוואות הטרנספורמציה שניתנו בסעיפים 3 ו- 6, למערכת k. נקבל את המשוואות

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\left(\frac{\partial X'}{\partial \tau} + u_\xi \rho\right) &= \frac{\partial N'}{\partial \eta} - \frac{\partial M'}{\partial \zeta}, & \frac{1}{c}\frac{\partial L'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Y'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \eta}, \\
\frac{1}{c}\left(\frac{\partial Y'}{\partial \tau} + u_\eta \rho\right) &= \frac{\partial L'}{\partial \zeta} - \frac{\partial N'}{\partial \xi}, & \frac{1}{c}\frac{\partial M'}{\partial \tau} &= \frac{\partial Z'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \zeta}, \\
\frac{1}{c}\left(\frac{\partial Z'}{\partial \tau} + u_\zeta \rho\right) &= \frac{\partial M'}{\partial \xi} - \frac{\partial L'}{\partial \eta}, & \frac{1}{c}\frac{\partial N'}{\partial \tau} &= \frac{\partial X'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \xi},
\end{aligned}$$

כאשר

$$\begin{aligned}
u_\xi &= \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} \\
u_\eta &= \frac{u_y}{\beta(1 - u_x v/c^2)} \\
u_\zeta &= \frac{u_z}{\beta(1 - u_x v/c^2)}.
\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}
\rho' &= \frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta} \\
&= \beta(1 - u_x v/c^2)\rho.
\end{aligned}$$

מאחר – כפי שנובע ממשפט הוספת המהירויות-המכוונות שבסעיף 5 – והוקטור (u_ξ, u_η, u_ζ) הוא לא יותר מאשר המהירות של המטען החשמלי, כפי שנמדד מה-מערכת k, אנו מקבלים הוכחה, המבוססת על עקרונות הקינמטיקה שלנו, לכך שיסודות תורת האלקטרודינמיקה של לורנס על האלקטרודינמיקה של גופים נעים עולה בקנה אחד עם עיקרון היחסות.

בנוסף, אעיר אולי בקצרה, שניתן להקיש את החוק החשוב הבא מהמשוואות

שפיתתנו: אם גוף טעון חשמלית נמצא בתנועה איפשהו בחלל והוא לא משנה את מטענו ביחס למערכת נעה, אז הטען של ישאר קבוע גם ביחס למערכת "הנייחת" K.

10 דינמיקה של אלקטרון המואץ באיטיות

נניח שחלקיק נקודתי (שיכונה להלן בשם "אלקטרון") נמצא בתנועה בתוך שדה אלקטרומגנטי. ננסח את חוק התנועה הבא עבור אלקטרון זה
אם האלקטרון נמצא במנוחה ברגע נתון, אז תנועת האלקטרון שמתרחשת עקב הארוע הבא בזמן מתאימה למשוואות הבאות

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \epsilon X \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \epsilon Y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \epsilon Z \end{aligned}$$

כאשר x, y, z מסמנים את הצירים של האלקטרון, ואילו m מסמן את מסת האל-קטרון, כל עוד תנועת האלקטרון איטית.
עתה, שנית, נניח שמהירות האלקטרון בזמן נתון היא v. אנו מחפשים את חוק התנועה של האלקטרון במופעים המיידיים של הזמן הבא. הבא בזמן.
מבלי לפגום במאפיינים הכלליים של שיקולנו, נרשה לעצמנו להניח שברגע שאנו מפנים את תשומת ליבנו לאלקטרון הוא נמצא בראשית הצירים ונע במהירות v לאורך ציר ה-X של המערכת K. ברור מכך שברגע הנתון ($t = 0$) האלקטרון נמצא במנוחה ביחס למערכת הצירים שנעה במהירות v במקביל לציר ה-X.
מתוך ההנחה שלעיל, יחד עם צירוף עיקרון היחסות, ברור שבזמן המידי הבא (עבור ערכים קטנים של t) האלקטרון, שנצפה מהמערכת k, נע בהתאם למש-

וואות

$$\begin{aligned} m\frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= \epsilon X', \\ m\frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= \epsilon Y', \\ m\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} &= \epsilon Z', \end{aligned}$$

כאשר הסמלים $\xi, \eta, \zeta, X', Y', Z'$ מתייחסים למערכת k. אם, בנוסף, אנו מחלי-טים שכאשר $t = x = y = z = 0$ גם $\tau = \xi = \eta = \zeta = 0$, אז משוואות הטרנספורמציה שבסעיפים 3 ו-6 תקפות ואנו מקבלים

$$\xi = \beta(x - vt), \qquad \eta = y, \qquad \zeta = z, \qquad \tau = \beta(t - vx/c^2),$$
$$X' = X, \qquad Y' = \beta(Y - vN/c), \qquad Z' = \beta(Z + vM/c).$$

ניעזר במשוואות הללו בכדי להעביר את משוואות התנועה שלעיל מהמערכת k למערכת K, נקבל

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\epsilon}{m\beta^3}X \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\epsilon}{m\beta}\left(Y - \frac{v}{c}N\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\epsilon}{m\beta}\left(Z - \frac{v}{c}M\right) \end{aligned}\right\} \cdots \qquad (\text{א})$$

מתוך נקודת המבט הרגילה נחקור עתה את ה-"אורך" וה-"רוחב" של מסת האל-קטרון הנע. נכתוב את המשוואות (א) בצורה

$$\begin{aligned} m\beta^3\frac{d^2x}{dt^2} &= \epsilon X &&= \epsilon X', \\ m\beta^2\frac{d^2y}{dt^2} &= \epsilon\beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right) &&= \epsilon Y', \\ m\beta^2\frac{d^2z}{dt^2} &= \epsilon\beta\left(Z - \frac{v}{c}M\right) &&= \epsilon Z', \end{aligned}$$

ונעיר תחילה ש-$\epsilon X', \epsilon Y', \epsilon Z'$ הם הרכיבים של הכוח הפונדרומוטיבי (כוח שניתן לשקילה) הפועל על האלקטרון, ואכן, הם יהיו כאלו כאשר הם נצפים מהמערכת הנעה כרגע עם האלקטרון, במהירות השווה לזו של האלקטרון. (כוח זה יכול להימדד, לדוגמה, ע"י קפיץ מאזן הנמצא במנוחה במערכת שהוזכרה לאחרונה.)

עתה אם נכנה כוח זה בשם "הכוח הפועל על האלקטרון,"[4] ואם נשמר את הנוסחה – מסה $\times$ תאוצה $=$ כוח – ואם גם נחליט למדוד את התאוצה מהמערכת הנייחת K, אז מהנוסחאות שלעיל נסיק

$$\begin{aligned} \text{מסה אורכית} &= \frac{m}{\left(\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^3}. \\ \text{מסה רוחבית} &= \frac{m}{1-v^2/c^2}. \end{aligned}$$

באופן טבעי, עבור הגדרה שונה של כוח ותאוצה נקבל ערכים אחרים עבור המסות. דבר זה מראה לנו שעלינו להתקדם בזהירות, כאשר אנו משווים תורות שונות של תנועת האלקטרון.

נעיר שהתוצאות הללו בנוגע למסה תקפות גם לחומר נקודתי שקיל (פונדרבילי), שכן חומר שקיל (פונדרבילי) (לפי התפיסה התחושתית של עולמנו) יכול להיעשות לאלקטרון באמצעות הוספת מטען חשמלי, לא משנה עד כמה הוא קטן.

נקבע עתה את האנרגיה הקינטית של האלקטרון. אם אלקטרון נע ממנוחה מראשית הצירים של המערכת K לאורך ציר ה-X תחת פעולה של הכוח האלקטרוסטטי X, אז ברור שהאנרגיה שהוא מוציא מהשדה האלקטרוסטטי שווה לערך $\int \epsilon X dx$. כאשר האלקטרון ממשיך בתאוטה (תאוצה שלילית), וכתוצאה מכך הוא יכול להפסיק ולתת אנרגיה בצורת קרינה, האנרגיה שיצאה מהשדה האלקטרוסטטי[†] חייבת להיות שווה לאנרגיית התנועה W של האלקטרון. עלינו לזכור שלאורך כל תהליך התנועה הנידון, המשוואה הראשונה מתוך משוואות א תקפה, לפיכך אנו מקבלים

$$\begin{aligned} W &= \int \epsilon X dx = m \int_0^v \beta^3 v dv \\ &= mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2-1}} \right). \end{aligned}$$

---

[4]כפי שלראשונה הראה מ. פלנק, הגדרה זו של כוח (כפי שניתנה כאן) אינה מועילה. הגדרת הכוח הובאה כאן בכדי להציג את חוקי המומנטום של האנרגיה בצורה הפשוטה ביותר

[†]כתוצאה מתנועת האלקטרון

לפיכך, כאשר $v = c$, יהפוך W לאינסופי. לא ייתכן קיומם של מהירויות הגדולות ממהירות האור.
מהטיעון שלעיל עולה כי ביטוי זה עבור האנרגיה הקינטית חייב להיות תקף גם עבור מסות שניתנות לשקילה (פונדרביליות).
נמנה עתה את תכונות התנועה של האלקטרון שנובעות ממערכת המשוואות א, ונגישות לניסויים.

1. מהמשוואה השניה של מערכת א נובע שהכוח החשמלי Y והכוח המגנטי N מפעילים כוחות סטייה שווים על האלקטרון הנע במהירות v, כאשר $Y = Nv/c$. לפיכך, אנו רואים שלפי התורה שלנו ניתן לקבוע את המהירות של האלקטרון מתוך היחס שבין כוח הסטייה המגנטי A_m וכוח הסטייה החשמלי A_e, עבור מהירות כלשהי באמצעות יישום החוק

$$\frac{A_m}{A_e} = \frac{v}{c}$$

החוק הזה ניתן לבדיקה באמצעות ניסוי, מאחר שניתן למדוד ישירות את המהירות של האלקטרון, לדוגמה, באמצעות שדות מיטלטלים של שדות מגנטים וחשמליים.

2. מהפחתת האנרגיה הקינטית של האלקטרון עולה שבין הפרש הפוטנציאלים, P, החצוי ובין המהירות v של האלקטרון חייב להתקיים היחס

$$P = \int X dx = \frac{m}{\epsilon} c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2 - 1}} \right).$$

3. אנו מחשבים את רדיוס העקום של מסלול האלקטרון, כאשר הכוח המגנטי (המהווה את כוח הסטייה היחיד בנמצא) פועל אנכית למהירות של האל-קטרון. מתוך השוויון השני במשוואות א אנו מקבלים

$$-\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{v^2}{R} = \frac{\epsilon}{m} \frac{v}{c} N \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

או

$$R = \frac{mc^2}{\epsilon} \cdot \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{1}{N}$$

שלושת היחסים הללו נותנים ביטוי שלם לחוקים שעל פיהם, לפי התורה שפיתחנו כאן, האלקטרון חייב לנוע.

לסיכום ברצוני לומר שבעבודתי על הבעיה שנדונה כאן קיבלתי סיוע נאמן מעמיתי לעבודה וידידי מישל בסו אשר לו אני חב כמה הצעות בעלות ערך.