הקדמה

בשנת 1905 פרסם אלברט אינשטיין סדרה של 4 מאמרים בכתב העת Annalen der Physik. מסמך זה הוא תרגום לעיברית של המאמר "חקירות על התורה של התנועה הבראונית".

<u>הערות תרגום:</u>

1. במונח "מהירות" הכוונה תמיד למהירות-מכוונת (velocity).

המאמר תורגם ונערך ע"י יונתן זלפה.

על התנועה של חלקיקים קטנים השרויים בנוזל עומד לפי תורת הקינטיקה המולקולרית של החום

אלברט אינשטיין

מאי, 1905

במאמר זה נראה שלפי תורת הקינטיקה המולקולרית של החום (כתוצאה מתנועה מולקולרית תרמית) גופים בגודל מיקרוסקופי השרויים בנוזל חייבים לבצע תנועות בסדר גודל שניתן לזיהוי באמצעות מיקרוסקופ. ייתכן שהתנועה שנדונה כאן זהה למה שנהוג לכנות בשם "תנועה מולקולרית בראונית", אעפ"כ, המידע שמצוי בידי על התנועה האחרונה הוא כל כך חסר עד כדי כך שלא אוכל לחוות דעה מוחלטת על הנושא.
אם באמת ניתן להבחין בתנועה שנדונה כאן יחד עם חוקיות פעולתה, אז התרמודינמיקה הקלאסית איננה יכולה להיראות כתקפה לגמרי אפילו עבור מרחבים מיקרוסקופים ברי-אבחנה, וקביעת גודלו האמיתי של האטום הופכת לאפשרית, אם תחזיות התנועה הזו יוכחו כשגויים, אז עובדה זו תספק טיעונים כבדי משקל כנגד תפיסת הקינטיקה המולקולרית של החום.

תוכן עניינים

1 על הלחץ האוסמוטי שניתן ליחס לחלקיקים מושהים

נניח שכמות של z מול של חומר לא אלקטרוליטי מומסת בנפח חלקי V^* של נוזל בעל נפח כולל V. אם הנפח V^* מופרד מהתמיסה הטהורה באמצעות קיר שמצד אחד מאפשר חילחול של התמיסה ומצד שני לא מאפשר מעבר של חומר מומס, אז הקיר הזה כפוף למה שאנו קוראים בשם לחץ אוסמוטי, שעבור ערכים גדולים מספיק של V^*/z מספק את המשוואה

$$pV^* = RTz.$$

אבל אם במקום החומר המומס הנפח החלקי V^* של התמיסה מכיל גופים מוש-הים קטנים שאינם יכולים לעבור דרך הקיר שמאפשר חילחול, אז לפי תורת הדינמיקה הקלאסית לא נוכל לצפות – אם לכל הפחות נזנח את כוח-הכבידה שאינו מעניין אותנו כאן – לכך שמופעל כוח על הקיר; כי לפי ההרגלים הת-פיסתיים שלנו, לא נראה שה"אנרגיה החופשית" של המערכת תלויה במיקומם של הגופים המושהים, אבל היא תהיה תלויה רק בכלל המסה והתכונות של החומר-ים המושהים, הנוזל, והקיר, כמו גם בלחץ ובטמפרטורה. בכדי להיות בטוחים, עלינו לקחת בחשבון את האנרגיה והאנטרופיה של הממשקים (כוחות קפילריים) בחישוב האנרגיה החופשית, אבל אנו יכולים להתעלם מהם, שכן שינויים במיקום של הקיר והגופים המושהים נמשכים ללא שינויים בגודל ובמצב של משטחי המגע. אבל מנקודת המבט של תורת הקינטיקה המולקולרית של החום מובילה אותנו

לתפיסה שונה. לפי תורה זו, השוני בין מולקולה מומסת ובין גוף מושהה הוא רק בגודל, וקשה לראות מדוע גופים מושהים לא מייצרים את אותו לחץ אוסמו-טי כמו שיוצרים מספר שווה של מולקולות מומסות. יהיה עלינו להניח שהגופים המושהים מבצעים תנועה לא רגילה, למרות שתנועה זו היא מאוד איטית, בנוזל, בשל התנועה המולקולרית של הנוזל; אם הקיר מונע מגופים אלה לעזוב את הנפח V^*, אז הכוחות שהם מפעילים יהיו בדיוק כמו הכוחות שמפעילים המולקולות המומסות. לפיכך, אם n גופים מושהים נמצאים בנפח V^*

(במילים אחרות $n/V = \nu$ בנפח יחידה) ואם המירווח בין גופים שכנים הוא מספיק גדול, אז מותאם להם לחץ אוסמוטי p שגודלו

$$p = \frac{RT}{V^*}\frac{n}{N} = \frac{RT}{N} \cdot \nu,$$

כאשר N מציינת את מספר המולקולות שמוכלות במול. בסעיף הבא נראה שתורת הקינטיקה-המולקולרית של החום אכן מובילה לתפיסה רחבה יותר של הלחץ האוסמוטי.

2 לחץ אוסמוטי מנקודת המבט של תורת הקינטיקה-המולקולרית של החום

אם $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ הם משתני מצב של מערכת פיזיקלית שקובעים לגמרי את המצב הרגעי של המערכת (כלומר, המשתנים הללו קובעים את מרכיבי הצירים והמהירות של כל האטומים של המערכת), ואם המערכת השלמה של משוואות השינוי של המשתנים הללו נתונה בצורה הבאה

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial t} = \phi_\nu(p_1, \ldots, p_\ell) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \ell)$$

כאשר

$$\Sigma \frac{\partial \phi_\nu}{\partial p_\nu} = 0,$$

אז האנטרופיה של המערכת נתונה באמצעות הביטוי

$$S = \frac{\overline{E}}{T} + 2k \lg \int e^{-E/2kT} dp_1 \ldots dp_\ell.$$

כאן T מסמן את הטמפרטורה המוחלטת, $\overline{E}$ מסמן את האנרגיה הפיזיקלית של המערכת ואילו E מסמן את האנרגיה כפונקציה של p_ν. האינטגרל מורחב מעל כל הצירופים של הערכים של p_ν שמתישבים עם התנאים של הבעיה. הקשר בין k ובין הקבוע N בא לידי ביטוי באמצעות היחס $R = 2kN$. לפיכך, עבור האנרגיה החופשית אנו מקבלים F

$$F = -\frac{R}{N} T \lg \int e^{-EN/RT} dp_1 \ldots dp_\ell = -\frac{RT}{N} \lg B.$$

הבה ונדמיין נוזל הכלוא בנפח V; ונניח שהנפח החלקי V^* (של V) מכיל n מול-קולות מומסות (או גופים מושהים בהתאמה), גבול האינטגרל B (האינטגרל B שהתקבל בביטויים עבור S ו-F) שנשמר בנפח V^* באמצעות קיר חדיר למחצה יושפע בהתאם. נניח שהנפח הכולל של המולקולולות המסיסות (הגופים המושהים) קטן בהשוואה ל-V^*. לפי התורה שהזכרנו, המערכת הזו מתוארת באופן שלם באמצעות המשתנים $p_1, \ldots, p_\ell$. אם מרחיבים את התמונה המולקולרית כך שתרד עד לפרטים הקטנים ביותר, אז הקושי בחישוב האינטגרל B יהפוך את החישוב המדוייק של F ללא מעשי. אעפ"כ במקרה הנדון כל שעלינו לדעת הוא איך F תלויה בגודל של הנפח V^* שמכיל את כל המולקולות המסיסות או הגופים המוש-הים (שיקראו בקיצור "חלקיקים").

מרכז הכובד של החלקיק הראשון יסומן באמצעות ערכי הצירים (המלבניים) x_1, y_1, z_1, באופן דומה x_2, y_2, z_2 מסמן את מרכז הכובד של החלקיק השני, וכך הלאה, כאשר x_n, y_n, z_n מסמן את מרכז הכובד של החלקיק האחרון, סביב כל אחד ממרכזי הכובד נתאים מקבילון קטן מאוד ונשאיף את שטחו לאפס, שט-חי המקבילונים יהיו שווים ל-$dx_1 dy_1 dz_1, \ dx_2 dy_2 dz_2, \ \ldots, \ dx_n dy_n dz_n$ בהתאמה וכולם ימצאו בנפח V^*. אנו מחפשים כרגע את ערך האינטגרל שמופיע בביטוי של F, בכפוף לכך שכל מרכזי הכובד של החלקיקים נמצאים בתחום שהותאם

עבורם. בכל מקרה, נוכל לבטא את האינטגרל בצורה

$$dB = dx_1 dy_1 \dots dz_n \cdot J \tag{1}$$

כאשר J אינו תלוי ב-$dx_1,\ dy_1,\ \dots$ ואינו תלוי בנפח V^* (כלומר במיקום של הקיר החדיר-למחצה). אבל J אינו תלוי גם בבחירת המיקומים של תחומי מרכזי הכובד של הערך V^*, כפי שנראה מייד. שהרי אם מערכת שניה של תחומים קטנים עד-אינסוף הייתה מותאמת למרכזי הכובד של החלקיקים המסומנים ב-$dx'_1 y'_1 z'_1,\ dx'_2 dy'_2 dz'_2,\ \dots,\ dx'_n dy'_n z'_n$ ואם התחומים הללו היו נבדלים מההתאמה המקורית אך ורק במיקומם (ולא בגודלם) ואם כולם היו מוכלים בנפח V^*, אז באופן דומה היינו מקבלים

$$dB' = dx'_1 dy'_1 \dots dz'_n \cdot J$$

כאשר

$$dx_1 dy_1 \dots dz_n = dx'_1 dy'_1 \dots dz'_n.$$

לפיכך

$$\frac{dB}{dB'} = \frac{J}{J'}.$$

אבל מהתורה המולקולרית של החום, שמוצגת במאמרים המצוטטים,[1] ניתן בקלות להסיק שההסתברות לכך שחלקיק ימצא בתחום $(dx_1, \dots dz_n)$ ברגע שרירותי נתון שווה ל- dB/B. באופן דומה, ההסתברות לכך שחלקיק ימצא בתחום $(dx'_1, \dots, dz'_n)$ ברגע שרירותי נתון שווה ל- dB'/B. אם חלקיקים נפרדים נעים (בקירוב מספיק) באופן באופן שאינו תלוי אחד בשני ואם הנוזל הומוגני ובנוסף על החלקיקים לא מופעלים כוחות, אז ההסתברויות המתאימות לשתי המערכות של התחומים חייבות להיות זהות אם הגגודל של התחומים זהה, אז אנו מקבלים

$$\frac{dB}{B} = \frac{dB'}{B}.$$

[1] A. Einstein, Ann. d. Phys. 11 (1903): 170

אבל ממשוואה זו ומהמשוואה הקודמת לה נובע ש-

$$J = J'.$$

מהשוויון האחרון עולה כי J לא תלוי ב- V^* ואינו תלוי ב- $x_1, y_1, \ldots, z_n$. לפיכך ומאינטגרציה על שתי אגפי שוויון 1, מקבלים

$$B = \int J dx_1 \ldots dz_n = J(V^*)^n$$

ומכך מקבלים

$$F = -\frac{RT}{N}\Big(\lg J + n \lg V^*\Big)$$

וגם

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V^*} = \frac{RT}{V^*}\frac{n}{N} = \frac{RT}{N}\nu.$$

מהשיקולים הללו אנו רואים שקיום הלחץ האוסמוטי הוא תולדה של תורת הקינמטיקה-המולקולרית של החום, בנוסף, על פי תורה זו, גם במצב שבו הדילו-לים גודלים כמויות מספריות שוות של מולקולות-מסיסות וחלקיקים מושהים מפעילים לחץ אוסמוטי זהה לגמרי.

3 תורת הדיפוזיה של ספירות קטנות מושרות

נניח שמפזרים אקראית חלקיקים מושהים בתוך נוזל. אנו מעוניינים לחקור את מצב שיווי משקלם הדינמי תחת ההנחה שכוח K, שתלוי במיקום אבל לא בזמן, פועל על החלקיקים הנפרדים. למען הפשטות, נניח שהכוח נמצא בכל מקום ופועל בכיוון ציר ה-X.

אם מספר החלקיקים המושהים ליחידת נפח היא ν, אז במקרה של איזון תרמודינ-מי ν היא כזאת פונקציה של x שהסטיית של האנרגיה החופשית עבור העתקה וירטואלית שרירותית δx של החומר המושהה מתאפסת. לפיכך

$$\delta F = \delta E - T\delta S = 0$$

נניח שבנוזל יש חתך רוחבי בנפח יחידה שניצב לציר ה-X ושחסום על ידי המישור-ים $x = 0$ ועל ידי $x = l$. אנו מקבלים אז ש-

$$\delta E = -\int_0^\ell K\nu\delta x dx$$

וגם

$$\delta S = \int_0^\ell R\frac{\nu}{N}\frac{\partial\delta x}{\partial x}dx = -\frac{R}{N}\int_0^\ell \frac{\partial\nu}{\partial x}\delta x dx.$$

לכן תנאי האיזון המבוקש יהיה

$$-K\nu + \frac{RT}{N}\frac{\partial\nu}{\partial x} = 0 \qquad (2)$$

או

$$K\nu - \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

המשוואה האחרונה אומרת שהכוח K מאוזן באמצעות הכוחות של הלחץ האו-סמוטי.

נשתמש בשוויון 2 בכדי לקבוע את מקדם הפיעפוע (דיפוזיה) של החומר המושהה. מצב האיזון הדינמי שאליו התייחסנו יכול להיתפס כסופרפוזיציה (העתקה) של שתי תהליכים שמתקדמים בשתי כיוונים מנוגדים:

1. תנועה של חומר מושהה תחת השפעת הכוח K שמופעל על כל אחד מהחלקי-קים המושהים.

2. תהליך של פיעפוע, שבהמשך יובן כתוצאה של תנועות אקראיות של חלקי-קים שנגרמות עקב תנועה מולקולרית תרמית.

אם לחלקיקים המושהים יש צורה מעגלית (כאשר P הוא הרדיוס של המעגל) ומקדם החיכוך של הנוזל הוא k, אז הכוח K מקנה לחלקיק הבודד את המהירות [2]

$$\frac{K}{6\pi kP},$$

[2] נשווה עם ג. קירכהוף "הרצאות על מכניקה" הרצאה 26 סעיף 4.

וגם

$$\frac{vK}{6\pi kP}$$

חלקיקים עוברים דרך היחידה של חתך רוחב ל-יחידת זמן.

בנוסף, אם D מסמן את מקדם הפיעפוע של החומר המושהה ו- μ מסמן מסה של חלקיק, אז עקב הפיעפוע כמות של

$$\left(-D\frac{\partial(\mu v)}{\partial x}\right) \text{ גרם}$$

או של

$$\left(-D\frac{\partial\nu}{\partial x}\right) \text{ חלקיקים}$$

יעברו דרך היחידה של חתך הרוחב לכל יחידת זמן. מאחר ואיזון דינמי חייב להתקיים, אנו חייבים לקבל

$$\frac{\nu K}{6\pi kP} - D\frac{\partial\nu}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

מתנאים 2 ו- 3 שמצאנו עבור איזון דינמי נוכל לחשב את המקדם של הפיעפוע. אנו מקבלים

$$D = \frac{RT}{N}\cdot\frac{1}{6\pi kP}.$$

לפיכך, להוציא את הקבוע האוניברסלי והטמפרטורה המוחלטת, מקדם הפיעפוע של החומר המושהה תלוי רק במקדם החיכוך של הנוזל ובגודלם של החלקיקים המושהים.

4 על תנועה אקראית של חלקיקים המושהים בתוך נוזל ועל היחס שלהם לדיפוזיה

עתה, נפנה לבדיקה הדוקה יותר של התנועות האקראיות אשר נגרמו כתוצאה מהתנועה המולקולרית התרמית, תוך התייחסות לדיפוזיה שנחקרה בסעיף הקודם. ברור, שאנו חייבים להניח שכל חלקיק בודד מבצע תנועה שאינה תלויה בתנועות

של כל החלקיקים האחרים; באופן דומה, התנועות של חלקיק אחד ושל אותו חלקיק בקטעי זמן שונים יהיו חייבים להיות מובנים כתהליכים שאינם תלויים הדדית כל עוד הקטע הנבחר איננו קטן מדי.

עתה נכניס לדיון שלנו קטע-זמן τ, שיהיה מאוד קטן בהשוואה לקטעי הזמן שנ-יתנים לצפיה, אבל עדיין, יהיה גדול דיו כך שהתנועות המבוצעות על ידי חלקיק במהלך שתי קטעי זמן בגודל τ רצופים יחשבו כמאורעות הדדיים בלתי-תלויים.

נניח, כעת, שסכום כולל של n חלקיקים נמצאים בנוזל. במרווח זמן τ, צירי ה-X של חלקיק בודד יגדלו ב- Δ, כאשר ל- Δ יש ערכים שונים (חיובים או שליליים) עבור כל חלקיק. חוק הסתברות מסויים יהיה תקף עבור Δ: נוכל להביע את מספר החלקיקים dn שעוברים העתקה שנמצאת בין Δ ו- $\Delta + d\Delta$ באמצעות המשוואה

$$dn = n\phi(\Delta)d\Delta$$

כאשר

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\Delta)d\Delta = 1$$

ו- ϕ נבדל מאפס רק עבור ערך קטן מאוד של Δ, ומספק את התנאי

$$\phi(\Delta) = \phi(-\Delta).$$

כעת נחקור כיצד המקדם של הפיעפוע תלוי ב- ϕ, נגביל את עצמנו שוב למקרה שבו מספר כל החלקיקים ליחידת נפח, ν, תלוי רק ב- x וב- t.

נניח ל- $\nu = f(x,t)$ לסמן את מספר החלקיקים ליחידת נפח; אזי נוכל לחשב את הפיזור של החלקיקים בזמן $i + \tau$ מתוך הפיזור שלהם בזמן t. מהגדרת הפונקציה $\phi(\Delta)$ נוכל בקלות לקבל את מספר החלקיקים בזמן $i + \tau$ שנמצאים בין שתי מישורים שאנכים לציר ה-X עסח ערכים-אופקיים (אבסציסיונים) x ו- $x + dx$.

אנו מקבלים

$$f(x,t+\tau)dx = dx \cdot \int_{\Delta=-\infty}^{\Delta=+\infty} f(x+\Delta)\phi(\Delta)d\Delta.$$

אבל מאחר שערכו של τ נמוך מאוד, נוכל להציב

$$f(x,t+\tau)=f(x,t)+\tau\frac{\partial f}{\partial t}.$$

בנוסף, נרחיב את $f(x+\Delta,t)$ לטורי חזקה של Δ:

$$f(x+\Delta,t)=f(x,t)+\Delta\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}+\frac{\Delta^2}{2!}\,\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\;+\;\ldots$$

נוכל לבצע הרחבה זו באמצעות אינטגרל, שהרי רק ערכים קטנים מאוד של Δ תורמים משהו לטור. אנו מקבלים

$$f+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\tau=f\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\Delta)d\Delta+\frac{\partial f}{\partial x}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta\phi(\Delta)d\Delta+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta^2}{2}\phi(\Delta)d\Delta+\ldots$$

בחלק הימני של השוויון שלעיל, מתאפסים הגורמים הזוגיים (הגורם השני, הרביעי וכו'), שכן $\phi(x)=\phi(-x)$, לעומת זאת, עבור הגורמים האי-זוגיים, כל גורם עוקב יהיה קטן מאוד בהשוואה לגורם שקדם לו. מכיוון ש-

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\Delta)d\Delta=1,$$

ומהצבת

$$\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta^2}{2}\phi(\Delta)d\Delta=D,$$

ומהזנחת כל הגורמים, למעט הראשון והשלישי, שבטור האינטגרלים מקבלים

$$\frac{\partial f}{\partial t}=D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \tag{4}$$

זוהי המשוואה הדיפרנציאלית המוכרת עבור דיפוזיה, כאשר D יכול להיות מזוהה כמקדם הדיפוזיה.

לפיתוח זה נוכל לקשור שיקולים חשובים אחרים. אנו מניחים שכל החלקיקים הבודדים מיוחסים לאותה מערכת צירים. אעפ"כ, אין זה הכרחי שהרי אין תלות הדדית בין תנועתם של חלקיקים בודדים. כעת, נייחס את התנועה של כל חלקיק למערכת צירים כך שהראשית מתלכד עם מרכז הכובד של החלקיק הנידון בזמן

$t = 0$, בהבדל, שעתה, $f(x,t)dx$ מסמן את מספר החלקיקים שציר ה-X שלהם גדל בזמנים $t = 0$ ו- $t = t$ בשיעור שלנע בין x ו- $x + dx$. לפיכך, גם במקרה זה משתנה הפונקציה f לפי שוויון 4, יתר על כן, ברור שעבור $x! = 0$ ו- $t = 0$ אנו חייבים לקבל

$$f(x,t) = 0 \qquad \text{וגם} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dx = n$$

הבעיה, שמתלכדת עתה עם בעיית הדיפוזיה ממקום אחד (כאשר מזניחים את האינטראקציה בין החלקיקים המפעפעים), נקבעת לגמרי באופן מתמטי; הפתרון שלה הוא

$$f(x,t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi D}} \frac{e^{\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)}}{\sqrt{t}}.$$

לפיכך, קצב פיזור השינויים של המיקום שמתחולל בזמן אקראי t זהה לפיזור של טעויות אקראיות, כפי שניתן היה לצפות. מה שחשוב הוא איך הקבוע שבמעריך קשור למקדם הדיפוזיה. בעזרת המשוואה הזו נחשב את ההעתקה λ_x בכיוון של ציר ה- x של חלקיק בממוצע, או ליתר דיוק, השורש הריבועי של הממוצע האריתמטי של ריבועי ההעתקות בכיוון של ציר ה- X; אנו מקבלים

$$\lambda_x = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{2Dt}.$$

לפיכך, ההעתקה הממוצעת פרופורציונית לשורש הריבועי של הזמן. ניתן בקלות להראות שהשורש הריבועי של ממוצע הריבועים של סך כל ההעתקות של החלקיקים שווה ל- $\lambda_x\sqrt{3}$.

5 נוסחה עבור העתקה ממוצעת של חלקיקים מושהים. שיטה לקביעת הגודל האמיתי של האטומים

בסעיף 3 מצאנו את ערך מקדם הדיפוזיה D של חומר המושהה בנוזל בצורה של ספרות קטנות בעלות רדיוס P, קיבלנו

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{6\pi kP}.$$

בסעיף 4 מצאנו שהערך הממוצע של העתקות חלקיקים בכיוון ציר ה-X בזמן t שווה ל-

$$\lambda_x = \sqrt{2Dt}.$$

נוכל להעלים את D ולקבל

$$\lambda_x = \sqrt{t} \cdot \sqrt{\frac{RT}{N} \frac{1}{3\pi kP}}.$$

משוואה זו מראה כיצד λ_x חייבת להיות תלויה לב T, k וב- P.
נחשב עתה את הגודל של λ_x עבור שנייה אחת. אם נקבע את גודלו של N כ- $6 \cdot 10^{22}$, אז בהתאם לתורת הקינטיקה של הגזים נבחר מים בטמפרטורה של $17°\mathrm{C}$ (כאשר $k = 1.35 \cdot 10^{-2}$) בתור הנוזל כמו כן הרדיוס של החלקיקים יהיה שווה ל- 0.001 מילימטר. אנו מקבלים

$$\lambda_x = 8 \cdot 10^{-6} \text{ cm} = 0.8 \text{ micron}.$$

לפיכך, ערך ההעתקה הממוצעת בדקה אחת יהיה 6 מיקרונים.
במהופך, נוכל להשתמש ביחלס שמצאנו בכדי לקבוע את N. אנו מקבלים

$$N = \frac{t}{\lambda_x^2} \cdot \frac{RT}{3\pi kP}$$

הבה נקווה שבקרוב יעלה בידם של חוקרים למצא פתרון לבעיה שהוצגה כאן, בעיה אשר יש לה חשיבות גדולה בתורת החום.